1 Entwickelnde, kommentierte Lösungen Abitur 2010

Als repräsentatives Beispiel für Aufgaben im Themenfeld ‘Automaten und formale Sprachen‘ dient der Jahrgang 2010. Die Lösung ist so dargestellt, dass sie für Schüler verständlich ist, also Selbststudiums geeignet ist.

1.1 Abiturprüfung GK 2010

Der früher benutzte Julianische Kalender sah vor, dass jedes Jahr prinzipiell 365 Tage hat. Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr und hat damit einen Tag mehr. Betrachtet werden nur Jahreszahlen nach Christi Geburt. Schaltjahre sind demnach z. B. 164, 2000, 8 und 12344.

a) Der folgende Übergangsgraph beschreibt einen endlichen Automaten, der genau die Wörter mit der folgenden Eigenschaft akzeptiert:

- Die Wörter entsprechen natürlichen Zahlen, die nach dem Julianischen Kalender Schaltjahre wären. Dabei wird die Zahl „rückwärts“ eingelesen, d. h. die Einerziffer zuerst.
- Das Wort `5231` repräsentiert somit das Jahr 1325.
- Führende Nullen sind erlaubt. So repräsentiert das Wort `2700` das Jahr 0072 (= 72).

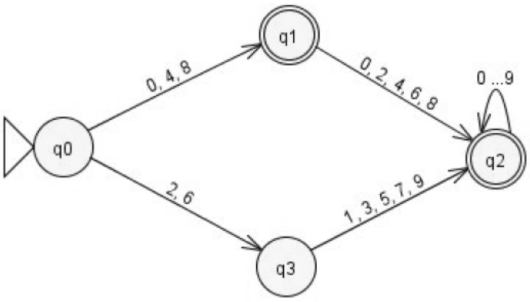
Geben Sie den Startzustand, das Eingabealphabet, die Menge der Zustände sowie die Menge der akzeptierenden Endzustände an.

Bestimmen Sie jeweils die Zustandsfolgen des Automaten bei der Eingabe der folgenden Wörter:

`425`, `6271` und `03021`

Geben Sie an, ob der Automat diese Wörter akzeptiert oder nicht.

Geben Sie die Bedeutung der Schleife beim Zustand q2 an.



(Hinweis: Nicht angegebene Übergänge führen in einen Fehlerzustand, der hier nicht angegeben ist.) *(13 Punkte)*

b) Entwerfen Sie eine reguläre Grammatik, die Zeichenfolgen mit der nachfolgenden Eigenschaft erzeugt:

Jede Zeichenfolge entspricht – umgekehrt gelesen – einer Jahreszahl, die durch 4 teilbar ist
(z. B. `0291` entspricht der Jahreszahl 1920).

Bestimmen Sie dazu das Startsymbol, die Menge der Terminalsymbole und die Menge der Nichtterminalsymbole dieser Grammatik und entwickeln Sie dann die Produktionsregeln der Grammatik.

Leiten Sie aus dem Startsymbol dieser Grammatik die Zeichenfolge `6102` ab (die der Jahreszahl 2016 entspricht). *(13 Punkte)*

c) Der Julianische Kalender wurde im 16. Jahrhundert durch Papst Gregor XIII. reformiert. Nach dem heute gültigen Gregorianischen Kalender gilt folgende Schaltjahrregelung:

Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr. Jahrhundertjahre (z. B. 1800, 1900, 2000) sind nur dann Schaltjahre, wenn sie durch 400 teilbar sind.

Z. B. ist das Jahr 2000 ein Schaltjahr, aber 1900 ist kein Schaltjahr, weil diese Zahl nicht durch 400 teilbar ist.

Entwickeln Sie den Akzeptor für die Erkennung der Schaltjahre nach dem Gregorianischen Kalender. Geben Sie dafür den Übergangsgraphen an und kennzeichnen Sie den Startzustand und den oder die Endzustände.

Die Jahreszahl werde dabei wieder als beliebige natürliche Zahl ziffernweise – beginnend mit der Einerziffer – eingelesen. *(12 Punkte)*

d) i) Die folgende Grammatik ist gegeben durch:
Startsymbol `S`
Menge der Terminalsymbole `T` = {`0`, `1`}
Menge der Nichtterminalsymbole `N` = { `S` , `A` }
Menge der Produktionen

$$P = \{ S \rightarrow 1;\ S \rightarrow 1A;\ A \rightarrow S0;\ A \rightarrow 0 \}$$

Das Wort `110` wird z. B. abgeleitet durch `S` → `1A` → `1S0` → `110`.

Das Wort `1100` wird z. B. abgeleitet durch `S` → `1A` → `1S0` → `11A0` → `1100`.

Leiten Sie zwei andere Wörter mit mindestens der Länge 5 aus dieser Grammatik ab.

ii) Entwickeln Sie eine Grammatik, die Worte erzeugt, die symmetrischen Jahreszahlen wie z. B.

`1991`, `303`, `99`, `7`, `2002` oder `1221`

entsprechen.

Dabei soll jede einzelne Produktionsregel auf der rechten Seite entweder nur ein Terminalsymbol oder genau ein Nichtterminal- und ein Terminalsymbol in beliebiger Reihenfolge enthalten. *(12 Punkte)*

1.2 Abiturprüfung GK 2010 - Lösungen

Zunächst ist es – **wie immer** - von grundlegender Bedeutung den **Text genau** zu **lesen** und sich auch bei späteren Teilaufgaben an ihn zu erinnern bzw. ihn erneut zu studieren. Es geht hier im Wesentlichen um durch 4 teilbare Zahlen, das ist die Kernaufgabenstellung. Als Folgerung daraus muss man sich klar machen, wann eine Zahl durch 4 teilbar ist. Das ist dann der Fall, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar sind (z.B. teilt vier 164, da vier 64 teilt). Damit **reduziert sich das Problem** auf die Untersuchung von zwei Ziffern, egal wie lang die Eingabe ist.

Teilaufgabe a)

Wir erhalten die Lösung durch Ablesen am gegebenen Automaten:

Eingabealphabet:	{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Zustandsmenge:	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
Startzustand:	q_0 (zu erkennen an dem Startzustandspfeil)
Endzustände:	q_1 und q_2 (zu erkennen an den doppelten Zustandskreisen)

Zustandsfolge für 425:	$q_0 \xrightarrow{4} q_1 \xrightarrow{2} q_2 \xrightarrow{5} q_2$	akzeptiert	(425 steht für das Jahr 5<u>24</u>)
Zustandsfolge für 6271:	$q_0 \xrightarrow{6} q_3 \xrightarrow{2} \text{Error}$	nicht akzeptiert	(6271 steht für das Jahr 17<u>26</u>)
Zustandsfolge für 03021:	$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{3} \text{Error}$	nicht akzeptiert	(03021 steht für das Jahr 12<u>03</u>)

Die Schleife beim Zustand q_2 besagt, dass eine Eingabe von 0..9 dazu führt, dass der Automat im Zustand q_2 verbleibt. Da es sich um das gesamte Eingabealphabet handelt bedeutet dies, dass man aus diesem Endzustand nicht mehr herauskommt, sofern es sich um eine gültige Eingabe handelt. Im Kontext einer *durch 4 teilbaren Zahl* bedeutet dies, dass *nur die <u>ersten</u> beiden Ziffern auf Teilbarkeit hin untersucht werden müssen*, die restlichen Ziffern spielen keine Rolle, was durch die Schleife am Zustand modelliert wird. Ungerade Ziffern sind ferner nie durch vier teilbar. Man bedenke, dass hier die <u>ersten</u> beiden Ziffern untersucht werden, die in den Automaten als Eingabe eingespeist werde. Diese entsprechen der Einer- und Zehnerstelle der (Jahres)Zahl, die ja gemäß der mathem. Teilbarkeitsregel alleinig für die Teilbarkeit durch vier relevant sind.

Teilaufgabe b)

<u>ACHTUNG</u>:
Es ist **oftmals nicht sinnvoll, sich direkt eine Grammatik zu überlegen**, weil diese Art der Darstellung weniger nah an der Art zu Denken liegt. Daher ist es in der Regel zu empfehlen, sich einen <u>Automaten zu überlegen</u>, der das Problem löst, und erst <u>anschließend eine passende Grammatik</u> daraus zu gewinnen, was durch einfaches Ablesen geschieht und einen Routineschritt darstellt. Dieses Vorgehen ist auch zu empfehlen, wenn dies nicht in der Aufgabe explizit formuliert ist.

<u>Direkte Variante:</u>

Beim Erzeugen einer Grammatik muss man sich zuvor überlegen, welche übergeordnete Struktur die zu modellierende Sprache hat. Man sucht nach Symmetrien und wiederkehrenden Mustern, damit man überhaupt einen Ansatz hat eine allgemeine Struktur mit Hilfe einer eng umgrenzten Menge von Regeln zu beschreiben. Das ist auch der Ansatz zur Lösung der folgenden Aufgabe.
Es geht hier darum eine Jahreszahl zu modellieren, die durch 4 teilbar ist. Dies ist der Fall, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern (Einer- und Zehnerstelle) gebildete Zahl durch 4 teilbar sind, die restlichen Ziffern spielen keine Rolle.

<u>Also Idee:</u> **>> Erzeuge mit Hilfe der Grammatik G die ersten beiden Ziffern so, dass sie durch 4 teilbar sind und alle anderen Ziffern beliebig. <<**

Bedenke, dass die **Jahreszahlen umgedreht generiert** werden sollen, aus der Jahreszahl 2016 wird 6102, was sich zu 61 bzgl. der Teilbarkeitsfrage reduziert und umgedreht 16 ergibt, die relevante Zahl, die durch 4 teilbar sein muss.

Nachdem man diesen zentralen Schritt getan hat – ohne ihn läuft gar nichts, da die grundlegende Idee fehlt – gilt es die Details auszuarbeiten. Dazu helfen oft Beispiele. Auch hier gilt es, Regelmäßigkeiten zu erkennen, sonst findet man keinen Modellierungsansatz. Machen wir das:

<u>Beispielzahlen</u>: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, … sind durch vier teilbar
einziffrig mehrziffrig [1.Ziffer 2. Ziffer …]
[0 lt. Def. dabei]

<u>Erkenntnis</u>:
- bei 2 | 6 als 2. Ziffer ist die 1. Ziffer immer ungerade, also 1 | 3 | 5 | 7 | 9
- bei 0 | 4 | 8 als 2. Ziffer ist die 1. Ziffer immer gerade, also 0 | 2 | 4 | 6 | 8

Für die Grammatik müssen die Zahlen nun in der umgedrehten Form generiert werden, obige also als
0, 4, 8, 21, 61, 02, 42, 82, 23, 63, 04, 44, 84, 25, 65, 06, …

Wir halten fest:

Anzahl an Ziffern	1 →	0| 4 | 8	
Anzahl an Ziffern	2 →	gerade / ungerade	→ 2. Ziffer abhängig von 1. Ziffer
Anzahl an Ziffern	>2 →	irrelevant, ab 3. Ziffer 0..9 egal	

Damit haben wir das Problem praktisch gelöst. Die Grammatik G ergibt sich nun daraus, diese erkannten Strukturen abzubilden. Dazu ist es zentral, sich die erkannten Aspekte **aufzuschreiben** und die wachsende Grammatik schrittweise immer wieder auf Berücksichtigung dieser Punkte zu prüfen, sonst verliert man leicht den Überblick.

Also gehen wir die Produktionen P an. Das Startsymbol ist S.

```
P = {
        S →   0   | 4   | 8;     // alle einziffrigen Jahreszahlen
        S →   0A | 4A | 8A;      // Mehrziffrige Erweiterung
        S →   2B | 6B;           // bei 2 oder 6 als 1. Ziffer ist die 2. Ziffer immer ungerade
                                 // Deswegen benötigen wir B, wir müssen ja eine zusätzliche Bedingung
                                 // einbauen und können daher nicht einfach A nehmen

„gerade“
        A →   0   | 2   | 4   | 6   | 8          // zweiziffrige Jahreszahlen
        A →   0E  | 2E | 4E  | 6E | 8E           // mehrziffrige Jahreszahlen


„ungerade“
        B →   1 | 3   | 5   | 7   | 9            // zweiziffrige Jahreszahlen
        B→    1 | 3E | 5E | 7E | 9E              // mehrziffrige Jahreszahlen


>2 Ziffern, „egal“
        E →   0   | 1   | 2  | …   | 9           // Terminale
        E→    0E | 1E | 2E | …   | 9E            // mehrziffrige Jahreszahlen, Nonterminal
}
```

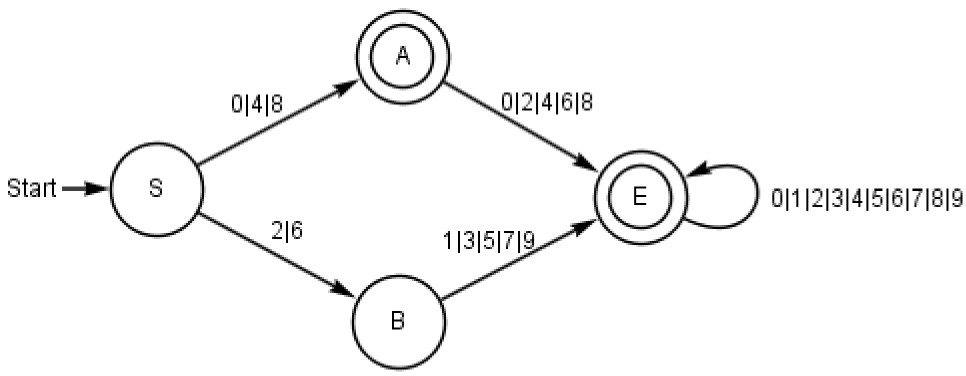
Schauen wir uns jetzt den vorgegebenen Automaten aus a) noch mal genauer an, so erkennen wir genau diese Struktur. Die 1. Ziffer wird auf 2 Arten betrachtet, in 0|4|8 und in 2|6. Dann geht es bei der 2. Ziffer entsprechend weiter. Einmal die geraden Ziffern 0|2|4|6|8 nach führender gerader 0|4|8 1. Ziffer und die ungeraden 2. Ziffern 1|3|5|7|9 nach führender 2 und 6 in der 1. Ziffer. Fortgeführt dann durch die irrelevanten 3. und weitere Ziffern durch die Schleife über dem gesamten Eingabealphabet bei q_2.

Startsymbol:	S
Terminalalphabet:	{0,1,2,…,9}
Nonterminale:	{S,A,B,E}

Ableitung von 6102: $S \xrightarrow{6} 6B \xrightarrow{1} 61E \xrightarrow{0} 610E \xrightarrow{2} 6102$

Indirekte Variante über Automat:

Es werden die beiden relevanten niederwertigsten Stellen zuerst in den Automaten eingelesen. Daraus ergibt sich für einziffrige durch 4 teilbare Zahlen der direkte Weg von S nach A. Ab der dritten Ziffer sind selbige irrelevant, was in der Schleife bei E deutlich wird. Ist eine Zahl bis dahin durch 4 teilbar, ändern die anderen Ziffern nichts mehr daran. Die nicht durch 4 teilbaren Ziffern entsprechen den wie üblich nicht eingezeichneten Fehlerzuständen, z.B. wenn die Einerstelle einer Zahl aus einer 1 besteht und sie damit nicht durch 4 teilbar sein kann. Wir erkennen, dass wir genau den Automaten aus a) erhalten, nur der beschreibende Text war ein anderer (die Schaltjahresbestimmung läuft *im Wesentlichen* auf eine Teilbarkeit durch 4 hinaus).



Hieraus lässt sich nun direkt eine reguläre Grammatik erzeugen.
Als Eingabe für den Automaten wurde die Einstelle zuerst eingelesen, die Grammatik soll die Einerstelle zuerst generieren und die höherwertigen Stellen rechts anhängen. Das führt zu einer rechtslineare Grammatik.

Wir haben vier Zustände, also auch vier Nichtterminale. Als Terminale treten die Zahlen 0 bis 9 auf.

S → 0 | 4 | 8
S → 0A | 4A | 8A
S → 2B | 6B

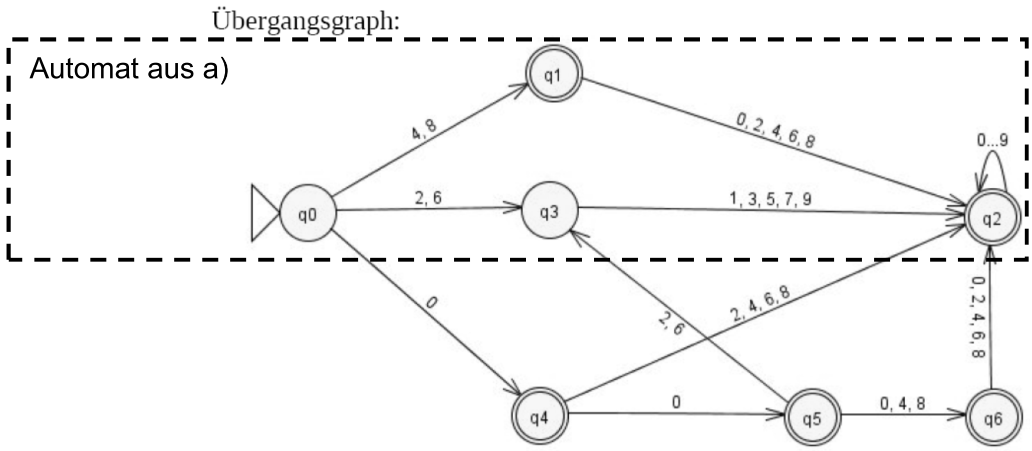
A → 0 | 2 | 4 | 6 | 8
A → 0E | 2E | 4E | 6E | 8E

B → 1 | 3 | 5 | 7 | 9
B → 1E | 3E | 5E | 7E | 9E

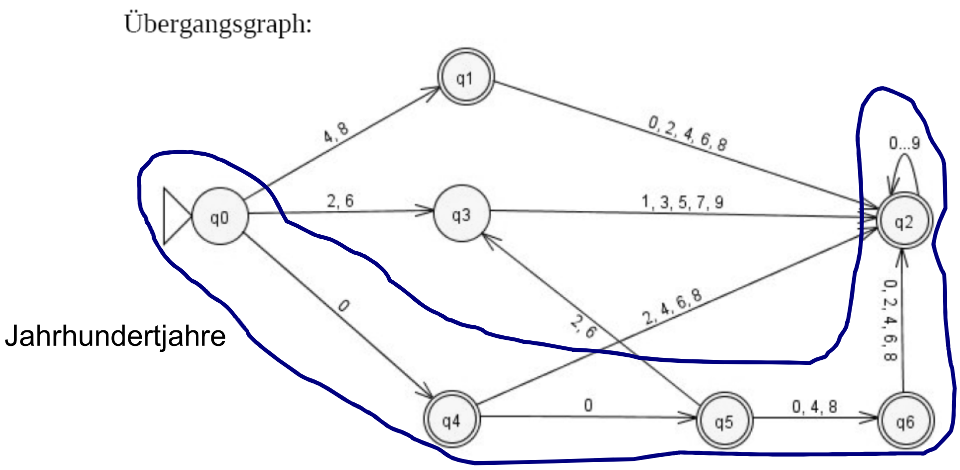
E → 0 | 1 | … | 9
E → 0E | 1E | … | 9E

Teilaufgabe c)

Hier sei an die einleitenden Worte erinnert. Liest man den Text genau, so erkennt man, dass ein Großteil der Aufgabe bereits in a) gelöst wurde. Der Automat erkennt alle Schaltjahre gemäß dem Julianischen Kalender, sprich, er erkennt alle durch 4 teilbaren Zahlen. Die Aufgabenstellung in c) ist eine **Erweiterung** dieser Aufgabenstellung, also **nutzen** wir doch die **Teillösung** aus a). Insbesondere der Satz 'Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ist ein Schaltjahr' bringt einen auf diese Tatsache, es ist nämlich genau die Aufgabenbeschreibung aus a) ...



Wie sind nun die Erweiterungen motiviert?



Man erkenne hier die sich wiederholenden Strukturen. Weicht man vom Weg der ,,reinen Jahrhundertjahre" ab, so werden die bereits bewährten zwei Wege über 4|8 bzw. 2|6 wieder eingekoppelt. Das ist ein Designprinzip bei Automaten, um mit einer möglichst kleinen Regelmenge bzw. wenig Zuständen einen komplexen Sachverhalt zu erfassen.

Die Festlegung des Startzustandes q_0 und der Endzustandsmenge $\{q_1, q_2, q_4, q_5, q_6\}$ ergibt sich direkt aus dem Problemkreis, praktisch die Antwort auf die Frage, wann eine gültige Zahl enden darf.

Teilaufgabe d)
d.i)
Hier sind nur schrittweise die vorgegebenen Grammatikregeln anzuwenden.

Ableitung von 11100: $S \longrightarrow 1\underline{A} \longrightarrow 1\underline{S}0 \longrightarrow 11\underline{A}0 \longrightarrow 11\underline{S}00 \longrightarrow 11100$

Ableitung von 000111:

$$S \longrightarrow 1\underline{A} \longrightarrow 1\underline{S}0 \longrightarrow 11\underline{A}0 \longrightarrow 11\underline{S}00 \longrightarrow 111\underline{A}00 \longrightarrow 111000$$

Teilaufgabe d)
d.ii)
Die Anforderung an die Produktionen die Form N→aA bzw. N→a einzunehmen entspricht genau der Tatsache, dass es sich hier um eine reguläre (rechtslineare) Grammatik handelt.

Für die Symmetrieerzeugung sind zunächst zwei Hauptfälle zu unterscheiden, die Ein- und mehrziffrigen Zahlen. Ferner wird Symmetrie abhängig von der 1. Ziffer erzeugt. Die Grammatik muss dafür sorgen, dass wenn die 1. Ziffer ein x war, auch nur x'e links und rechts angefügt werden. Das erreicht man, in dem man für jede Ziffer ein extra Nonterminal als Fortführungssymbol verwendet.

<u>Beispiele</u>:	0	Einziffrig (0..9 erlaub)
	00, 11, 22, 33	zweiziffrige Symmetrie, Form: aa
	XaX	mehrziffrige Symmetrie a ist ein beliebiges Terminal, X die Symmetrie erzeugenden Terminalzahlen, z.B. 141, 454, 727
	XaaX	7227, 1331 innere Blöcke von a, außen gleiche Terminalzahl x

<u>Beispiel</u>:
0A → 00 oder 0S0
→ 0x0 oder 00 A0
→ 0000 oder 00 S0 0
→ 00000 oder 00 x 00
→ 00 S0 00

Also

P = {
S → 0 | 1 | 2 | … | 9; //einziffrige Zahlen
S → 0A | 1B | 2C | 3D | 4E | 5F | 6G | 7H | 8J | 9K //mehrziffrige Zahlen

A → S0 | 0;
B → S1 | 1;
C → S2 | 2;
D → S3 | 3;
E → S4 | 4;
F → S5 | 5;
G → S6 | 6;
H → S7 | 7;
J → S8 | 8;
K → S9 | 9;
}

Lösungen typischer Aufgaben im Abitur

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Teilaufgabe a)

Startzustand q0
Eingabemenge: {0 ... 9}
Menge der Zustände: { q0, q1 , q2 , q3 }
Menge der Endzustände: { q1, q2 }

Zustandsfolge der Eingabe: 425
q0 → q1 → q2 → q2
Die Eingabe wird akzeptiert.
Zustandsfolge der Eingabe: 6271
q0 → q3 → Fehlerzustand, dieser kann nicht verlassen werden.
Die Eingabe wird nicht akzeptiert.
Zustandsfolge der Eingabe: 03021
q0 → q1 → Fehlerzustand, dieser kann nicht verlassen werden.
Die Eingabe wird nicht akzeptiert.

Die Schleife bei q2 modelliert die Eigenschaft, dass Zahlen mit mehr als zwei Stellen immer dann durch vier teilbar sind, wenn die beiden letzten Ziffern eine Zahl darstellen, die durch vier teilbar ist. Alle über diese beiden Ziffern hinausgehenden Ziffern haben keinen Einfluss mehr bzgl. der Teilbarkeit durch vier.

Teilaufgabe b)

Startsymbol S
T = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } (Menge der Terminalsymbole)
N = {S, A, B, E} (Menge der Nichtterminalsymbole)

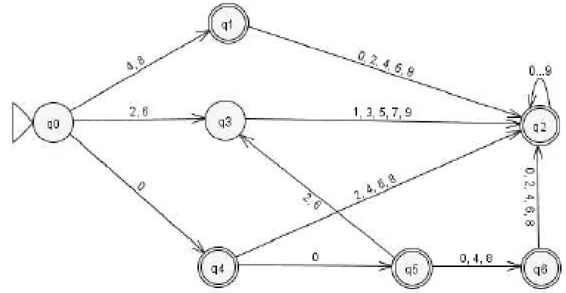
Menge der Produktionen:
P = {
S → 0A | 4A | 8A | 0 | 4 | 8;
S → 2B | 6B;
A → 0 | 2 | 4 | 6 | 8;
A → 0E | 2E | 4E | 6E | 8E;
B → 1 | 3 | 5 | 7 | 9;
B → 1E | 3E | 5E | 7E | 9E;
E → 0 | … | 9;
E → 0E | … | 9E;
}

Ableitung der Zeichenfolge `6102` (entspricht der Jahreszahl 2016)
`S → 6B → 61E → 610E → 6102`

Teilaufgabe c)

Eingabealphabet: {0 ... 9 }
Startzustand: q0
Zustandsmenge: { q0, q1, q2, q3, q4, q5, q6 }
Menge der Endzustände: { q1, q2, q4, q5, q6 }

Übergangsgraph:



Teilaufgabe d)

i) Das Wort `111000` wird z. B. abgeleitet durch
`S → 1A → 1S0 → 11A0 → 11S00 → 111A00 → 111000`
Das Wort `11100` wird z. B. abgeleitet durch
`S → 1A → 1S0 → 11A0 → 11S00 → 11100`

ii) Startsymbol S
Menge der Terminalsymbole: T = { 0 , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }
Menge der Nichtterminalsymbole: N = { S , A , B , C , D , E , F , G , H , I , K }
Menge der Produktionen:
P = {
S → 0A | 1B | 2C | 3D | 4E | 5F | 6G | 7H | 8I | 9K;
S → 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9;
A → S0 | 0;
B → S1 | 1;
C → S2 | 2;
D → S3 | 3;
E → S4 | 4;
F → S5 | 5;
G → S6 | 6;
H → S7| 7;
I → S8 | 8;
K → S9| 9;
}

Typisch - wie hier - sind etwa:

- 4/5-Tupel bestimmen
- Eingabe ableiten
- DEA --> G
- DEA konstruieren aus Problem oder nach einer G
- Wort ableiten
- L(G) bestimmen